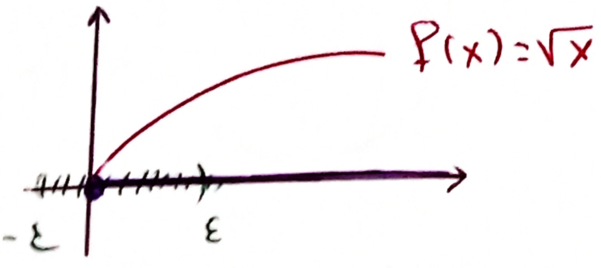
ΟΡΙΣΜΟΣ

Υποθέτουμε ότι X τυχαίο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Μια απεικόνιση $f: X \to \mathbb{R}^d$ θα λέγεται διαφορίσιμη k-τάξεως εάν $\forall x \in X$, $\exists$ περιοχή U του $\mathbb{R}^n$ γύρω από το x και διαφορίσιμη $F: U \to \mathbb{R}^d$ ώστε $F|_{U \cap X} = f|_{U \cap X}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ας υποθέσουμε ότι $X = [0, +\infty)$ και $f: X \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \sqrt{x}$. $\nexists$ επέκταση της f σε σύνολα της μορφής $U = (-\varepsilon, \varepsilon)$, με $\varepsilon > 0$



ο λόγος οφείλεται στο γεγονός ότι $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ και

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ας υποθέσουμε ότι $X \subseteq \mathbb{R}^n$ και $Y \subseteq \mathbb{R}^L$ και $f: X \to Y$ θα λέμε ότι η f είναι διαφορομορφισμός εάν:

i) η f είναι διαφορίσιμη, 1-1 και επί

ii) η $f^{-1}: Y \to X$ είναι διαφορίσιμη

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένα υποσύνολο $M^m \subseteq \mathbb{R}^n$ ονομάζεται διαφορίσιμο πολύπτυγμα διάστασης m εάν σε κάθε σημείο $x \in M^m$ $\exists$ ανοικτή περιοχή U του $\mathbb{R}^n$ τ.ω. το $M^m \cap U$ να είναι διαφορομορφικό με κάποιο υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$. Να $\exists$ δηλαδή διαφορομορφισμός $f: U \cap M^m$
$f: U \cap M^m \to V \subseteq \mathbb{R}^m$

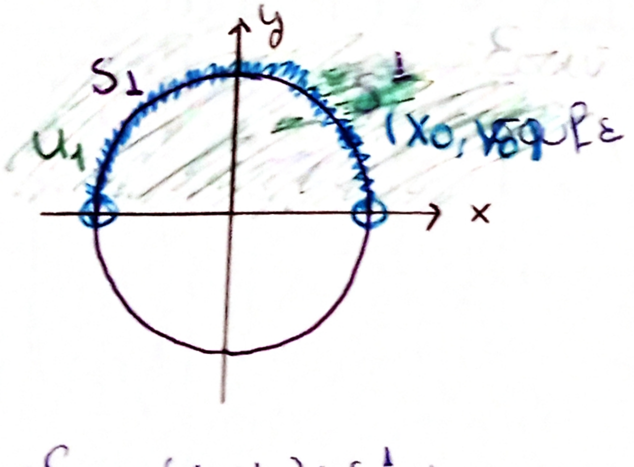
ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ

Η απεικόνιση f λέγεται χάρτης με πεδίο ορισμού το σύνολο U και η $g = f^{-1}$ λέγεται παραμέτρηση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ας θεωρήσουμε τον κύκλο $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

Θ.Δ.Ο. ο κύκλος είναι διαφορίσιμο πολύπτυγμα διάστασης 1.



Έστω $(x_0, y_0) \in S^1$ και ας υποθέσουμε ότι βρίσκεται στο άνω ημικύκλιο, δηλαδή $y_0 > 0$

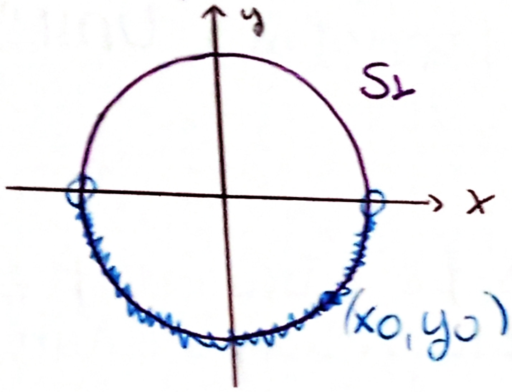
Θεωρώ το σύνολο $U_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$

και την απεικόνιση $\phi_1 : U_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \to (-1,1)$ με τύπο
$\phi_1(x,y) = x$

Επειδή ϕ_1 διαφορίσιμη έπεται ότι η
$f_1 : S^1 \cap U_1 \to (-1,1)$ και τύπο $f_1(x,y) = x$ είναι
διαφορίσιμη.
Η αντίστροφη της f_1 είναι η $g_1 = f_1^{-1} : (-1,1) \to S^1 \cap U_1$
με τύπο

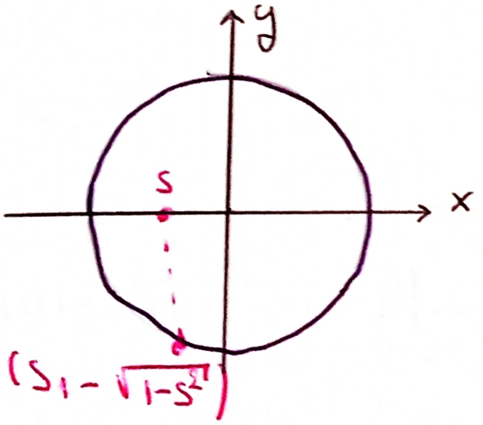
$$g_1(s) = (s, +\sqrt{1-s^2})$$

Έχω καλύψει λοιπόν, σχεδόν το μισό κύκλο.
Μας μένει ο άλλος μισός.
Στην περίπτωση που $y_0 < 0$

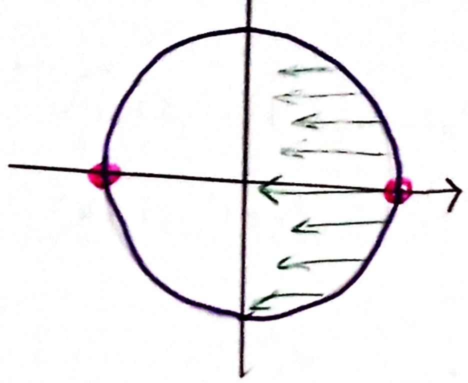


παίρνουμε το σύνολο $U_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}$ και
την απεικόνιση $\phi_2 : U_2 \cap S^1 \to (-1,1)$ με τύπο
$\phi_2(x,y) = x$ τότε $f_2 : U_2 \cap S^1 \to (-1,1)$ είναι
διαφορομορφισμός. Σημειώνουμε ότι
$g_2(s) = f_2^{-1} : (-1,1) \to U_2 \cap S^1$ έχει τύπο

$$g_2(s) = (s_1 - \sqrt{1-s^2})$$

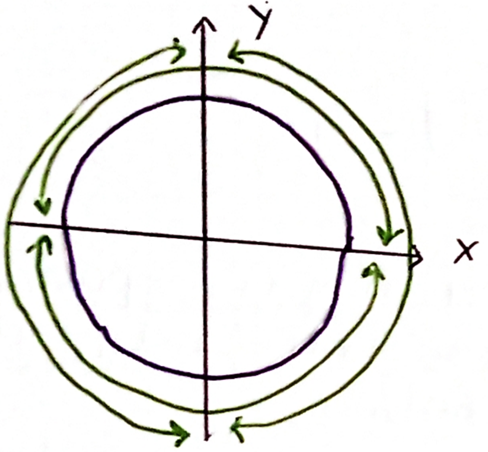


Μέχρι στιγμής έχουμε καλύψει ολόκληρο το κύκλο εκτός από δύο σημεία $p=(1,0)$ και $q=(0,1)$



Για να καλύψουμε τα δύο αυτά σημεία θα χρησιμοποιήσουμε τις προβολές στον y-άξονα

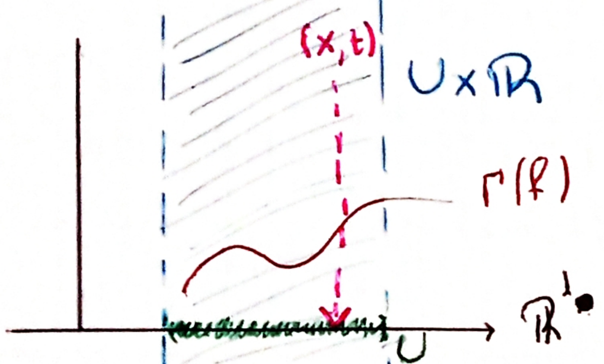
Δηλαδή, για το σημείο $(1,0)$ θεωρούμε $U_3=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x>0\}$ και $\phi_3(x,y)=y$

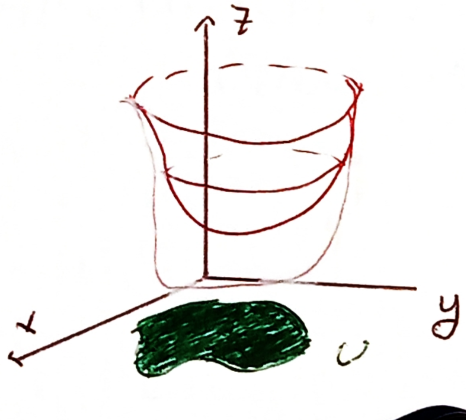


Παράδειγμα

Θα δούμε έναν απλό τρόπο να κατασκευάσουμε παραδείγματα πολυπτυγμάτων. Έστω U είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $f: U\subseteq\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ μια διαφορίσιμη συνάρτηση. Θεωρούμε το γραφ. της f

$$\Gamma(f)=\{(x,f(x))\in\mathbb{R}^{n+1}: x\in U\}$$





Θ.δ.ο. το $\Gamma(f)$ είναι διαφορίσιμο πολύπτυγμα διάστασης n.

Θα ασχοληθούμε με το πρώτο σχήμα.
Πρέπει να βρούμε έναν διαφορομορφισμό
$\varphi : \Gamma(f) \to V \subseteq \mathbb{R}^n$.

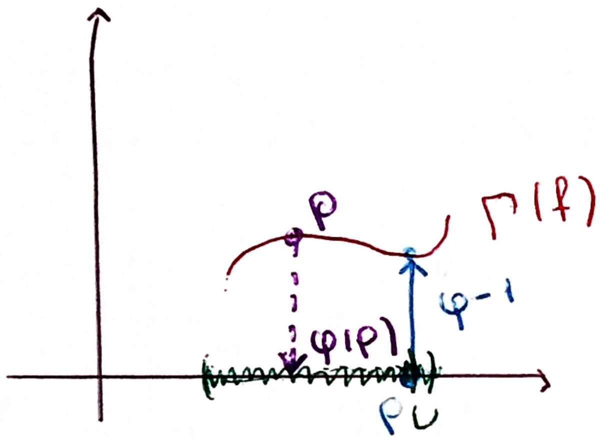
Θεωρούμε το ανοικτό υποσύνολο $U \times \mathbb{R}$ του $\mathbb{R}^{n+1}$.

Ορίζουμε την απεικόνιση $\Phi : U \times \mathbb{R} \to U$ με τύπο

$\Phi(x, t) = x$.

Η Φ προφανώς είναι διαφορίσιμη.

Κατά συνέπεια και ο περιορισμός της Φ στο $\Gamma(f)$ είναι διαφορίσιμη.
Συμβολίζουμε τον περιορισμό με φ.
Άρα $\varphi : (U \times \mathbb{R}) \cap \Gamma(f) \to U$



Επειδή $\Gamma(f)$ γράφημα η φ είναι "1-1" και "επί".

Απομένει να αποδείξουμε ότι και η αντίστροφη της φ είναι επίσης διαφορίσιμη.

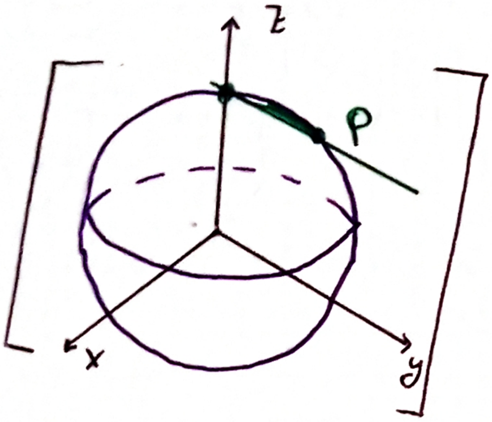
Παρατηρούμε ότι εάν $p \in U$ τότε $\varphi^{-1} : U \to \Gamma(f)$ έχει τύπο $\varphi^{-1}(p) = (\varphi, f(p))$ η οποία είναι διαφορίσιμη (διότι κάθε συνιστώσα της είναι διαφορίσιμη). Άρα το $\Gamma(f)$ είναι πολύπτυγμα διάστασης n.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

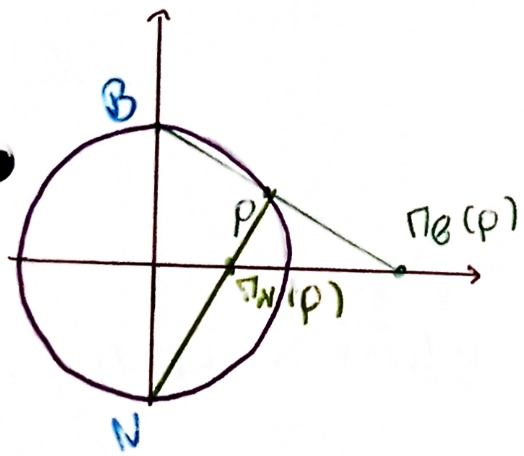
Θα δούμε έναν πιο απλό τρόπο να κάνουμε τη σφαίρα διαφορίσιμο πολύπτυγμα.

Ας θεωρήσουμε τη 2-διάστατη σφαίρα

$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$



Θα κάνουμε χρήση της στερεογραφικής προβολής. Ας συμβολίσουμε με $B = (0, 0, 1)$ το βόρειο πόλο της S^2 και με $N = (0, 0, -1)$ τον νότιο πόλο της σφαίρας. Για κάθε $p \in S^2 - \{B\}$ συμβολίζουμε με $\Pi_B(p)$ το σημείο που προκύπτει από την τομή της ευθείας που ενώνει το p με το B και το xy-επίπεδο. Αντίστοιχα, ορίζουμε την απεικόνιση $\Pi_N : S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^2$



Οι απεικονίσεις Π_B και Π_N λέγονται στερεογραφικές προβολές, από το βόρειο και νότιο πόλο της σφαίρας αντίστοιχα.

Ας βρούμε τους τύπους των Π_B και Π_N

Ας ξεκινήσουμε με το Π_B. Υποθέτουμε ότι $p(x, y, z)$

Η ευθεία που ενώνει B και p δίνεται από τον τύπο

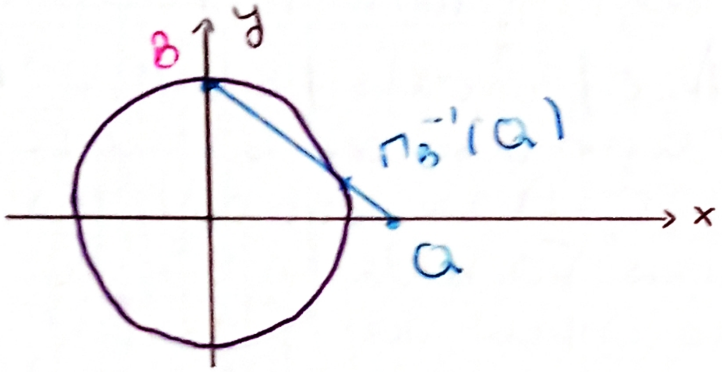
$$\varepsilon(t) = \vec{OB} + t\,\vec{BP} = (0, 0, 1) + t\,(x, y, z - 1)$$
$$= (tx, ty, 1 + t(z-1))$$

Η ευθεία αυτή τέμνει το xy-επίπεδο για
$t = \frac{1}{1-z}$

Επομένως, $\Pi_B(x,y,z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0\right)$

$\simeq \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)$

Είναι φανερό ότι η Π_B είναι διαφορίσιμη. Θ.δ.ο. και η αντιστροφή της είναι διαφορίσιμη.
Ας υπολογίσουμε τον τύπο της αντιστροφής Π_B^{-1}.



Έστω $a(a,b,0)$ σημείο του xy-επιπέδου. Η ευθεία που ενώνει το $(a,b,0)$ με το σημείο $B(0,0,1)$ δίνεται από τον τύπο

$$f(t) = \vec{OB} + t\vec{Ba}$$
$$= (0,0,1) + t(a,b,-1)$$
$$= (ta, tb, 1-t)$$

Για να βρούμε για ποιο t η f τέμνει τη σφαίρα παίρνουμε την εξίσωση:

$$(ta)^2 + (tb)^2 + (1-t)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$t = \frac{2}{1+a^2+b^2}$$

Επομένως, $\Pi_B^{-1}(a,b,0) = \left(\frac{2a}{a^2+b^2+1}, \frac{2b}{a^2+b^2+1}, \frac{a^2+b^2-1}{a^2+b^2+1}\right)$

η οποία είναι διαφορίσιμη.
Ακριβώς με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε

$$\pi_N(x,y,z) = \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z}, 0\right)$$

$$\pi_N^{-1}(a,b,0) = \left(\frac{2a}{a^2+b^2+1}, \frac{2b}{a^2+b^2+1}, \frac{-a^2-b^2+1}{a^2+b^2+1}\right)$$

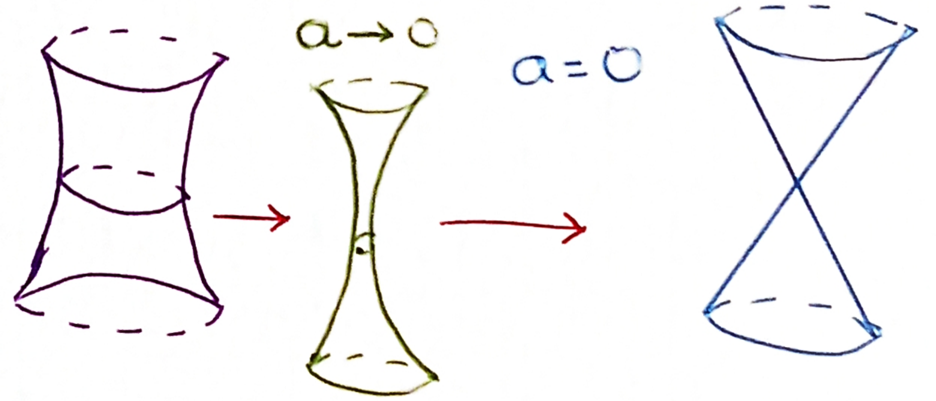
Άσκηση

Με αυτό τον τρόπο βλέπουμε ότι μέσω των ζευγών
$(U_B = S^2\setminus\{B\}, \pi_B)$
$(U_N = S^2\setminus\{N\}, \pi_N)$ η σφαίρα γίνεται διαφορ. πολύπτυγμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ας θεωρήσουμε το σύνολο $M_a = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2-z^2=a^2\}$ όπου $a\in\mathbb{R}$. Να μελετηθεί για ποιες τιμές του a, το σύνολο M_a είναι διαφορίσιμο πολύπτυγμα.

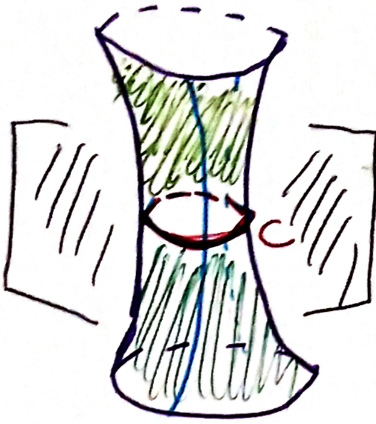
$a\neq 0$



Ισχυριζόμαστε ότι για $a\neq 0$, έχουμε διαφορίσιμο πολύπτυγμα διάστασης 2 και όταν $a=0$, το σύνολο $M_0=\{(x,y,z): x^2+y^2-z^2=0\}$ δεν είναι πολύπτυγμα.

1η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ $a\neq 0$

πρέπει να καλύψουμε το σχήμα μας με ανοιχτές περιοχές και απεικονίσεις που είναι διαφορομορφικές με ανοικτά του $\mathbb{R}^2$.



Το μέρος

$M_a^+ = M_a \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z>0\}$

παραμετράται μέσω της απεικόνισης

$\varphi_a^+ : \mathbb{R}^2 \setminus B_a(0) \to \mathbb{R}^3$ με τύπο

$\varphi_a^+(x,y) = (x, y, \sqrt{x^2+y^2-a^2})$

η οποία είναι προφανώς διαφορίσιμη.

Ομοίως, για το $M_a^- = M_a \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z<0\}$, το παραμετρικοποιούμε μέσω της απεικόνισης

$\varphi_a^- : \mathbb{R}^2 \setminus B_a(0) \to \mathbb{R}^3$ και τύπο $\varphi_a^-(x,y) = (x, y, -\sqrt{x^2+y^2-a^2})$

Μένει να καλύψουμε τον κύκλο στο κέντρο.

$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2=a^2,\ z=0\}$

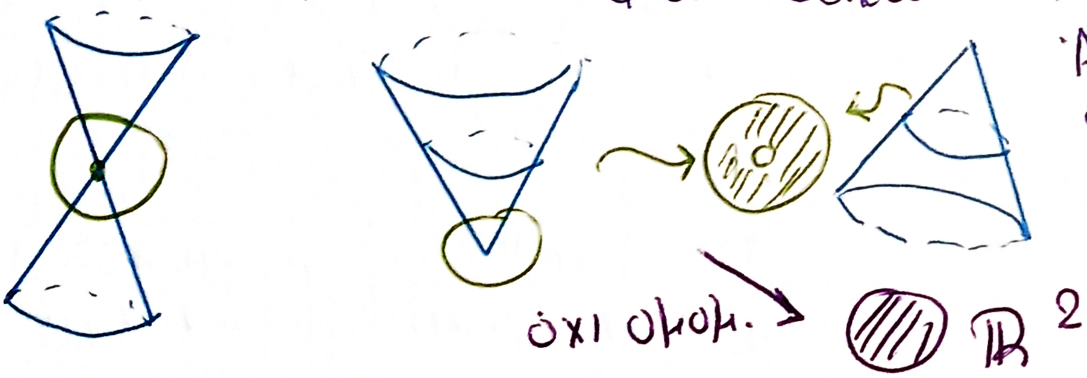
Για να περιγράψω τα σημεία του κύκλου θεωρώ απεικονίσεις που προκύπτουν λύνοντας την εξίσωση $x^2+y^2-z^2=a^2$ ως προς x και y.

(Τις λεπτομέρειες να τις κάνετε ως άσκηση!)

Με αυτό τον τρόπο βλέπουμε ότι M_a, $a \neq 0$, διαφορίσιμη πολλαπλότητα διάστασης 2.

$a=0$

Παρατηρούμε ότι κάθε περιοχή του $M_0 \setminus \{0,0,0\}$ είναι ομοιομορφική με δύο διακριτούς δακτυλίους.



Άρα για $a=0$ όχι διαφορίσιμη πολλαπλότητα